2024年3月6日 11:09

事件域

样本空间 Ω. $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ 是事件域 (σ-代数) 如果:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$ (补)

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (可列并)

不在事件域中,就不视为事件.

Pro. 1. $\phi \in \mathcal{F}$

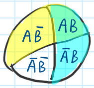
2. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (可列交)

(De morgan)

3. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathcal{F}$ (差)

$\mathcal{F} = \{\phi, \Omega\}$ 平凡事件域

包含A,B的最小域 ($A \neq \overline{B}$, $A \cap B \neq \phi$, $A \not\subset B$)



$|\mathcal{F}| = 2^4$

$\mathbb{R}$ 上一切左闭右开区间生成的 σ-域 称为博雷尔 σ-域

$\mathcal{B}$ 博雷尔点集

概率的公理化定义

样本空间 Ω 事件域 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$

如果 $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 满足:

(1) (非负性) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$

(2) (规范性) $P(\Omega) = 1$

(3) (可列可加性) 若 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ 两两互不相容,

则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

称P为概率

事件的"测度"

几何概型

$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, m 是定义在 Ω 的可测集(博雷尔点集)上具有规范性的测度

Pro. 1. $P(\phi) = 0$

$P(\phi) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \phi) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi)$

2. 有限可加性

Given $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, let $A_i = \phi$, $i > n$.

3. (减法公式) $A \subset B$ 则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$

$2 \Rightarrow 3$

4. (加法公式) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

(分割为不相容事件)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{i_1<\cdots<i_n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_n})$$

可数 ok?

(布尔不等式) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

(Bonferroni) $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

单调不增事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$ P是上连续的

减 $\bigcup$ 下

Th. 设 $P: \mathcal{F} \to [0,1]$, P满足有限可加性.

则P满足可列可加性的充要条件是 P下连续.

Co 1. 概率是下连续的

Co 2. 概率是上连续的

2024年2月28日 10:39

样本空间Ω的可测子集 随机事件

随机事件的关系

包含 $A \subset B$ A发生 $\Rightarrow$ B发生

等于 $A = B$ A发生 $\Leftrightarrow$ B发生 (互相包含)

和事件 $A \cup B$ A与B至少一个发生

积事件 $A \cap B$, AB A与B同时发生

互斥(不相容) $A \cap B = \phi$ A与B不会同时发生 互斥 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $P(A \cap B) = 0$

差 $A - B$ A发生且B不发生

对立(逆、补) $\bar{A}$ $A \cap \bar{A} = \phi$ 且 $A \cup \bar{A} = S$

条件概率

2024年3月13日 10:41

样本空间 B Ω

$P(A|B) \geq P(AB)$

一般要求 $P(B)>0$，但 $P(B)=0$ 并非无法定义条件概率(待定型)

设 $A,B\in\mathcal{F}$，$P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为 A 在 B 发生条件下的条件概率.

(乘法公式) 设 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

推广. 设 $P(BC)>0$，则 $P(ABC)=P(A|BC)P(B|C)P(C)$

$(P(B)\geq P(BC)>0)$

(全概率公式) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$，$P(B_i)>0$

$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+\cdots$

(贝叶斯公式)

$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$ 通常会对 $P(B)$ 再应用关于 A 的全概率公式

条件概率具有概率的一切性质 (变量是A，不是B!)

1° $P(A|B)\geq 0$

2° $P(\Omega|B)=1$

3° $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k|B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k|B)$ $(\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 互不相交$)$

4° $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$

...

敏感性问题调查

A：真实答案为"是"

A'：回答为"是"

假设 $P(A)=p$，调查人数为 S.

$$S\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{答:是}\\ \frac{1}{2} & \begin{cases} p & \text{答:是} \\ 1-p & \text{答:否}\end{cases}\end{cases} \qquad \text{答:是}\to p', \quad \text{答:否}\to 1-p'$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p=p'$

$\Rightarrow p=\frac{2}{3}p'$

eg. 15真5假，任意抽2张，验其中一张为假，求在此条件下两张均假的概率.

$A=\{$任意抽2张均假$\}$

$B=\{$任意抽2张，2张中再抽一张为假$\}$

$P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}$ $\qquad P(B)=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}$

(答案) $A=\{$任意抽2张均假$\}$ $\quad P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}$

$B=\{$至少一张为假$\}$

(题目改为"已知其中一张为假"更好?)

$P(B)=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}+\dfrac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}$

$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}=\dfrac{2}{17}$

伯恩斯坦反例：两两独立而不相互独立

独立性

$P(AB)=P(A)P(B)$

若 $P(A)>0$，A,B 独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$

eg. 随机游动

2n 次

$p_1=\cdots=p_4=\frac{1}{4}$，求 $P\{X_1=X_3, X_2=X_4\}$

四项分布

$$P=\sum_{k+m=n}\frac{(2n!)}{(k!)^2(m!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\binom{2n}{n}^2$$

算

伯努利试验

2024年3月20日 11:10

首次成功 $p=(1-p)^{k-1}p$

第r次成功发生在第k次 $p=\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r$

第k次试验完恰成功r次（第k次成功）

$k1=k+1$

$t[i]-t[i-1]>k1$

$d[i]$

$d[i]>k1$ $+(E1*k1+E2*(d[i]-k1)+E_3)$ ①

else $+(E1*d[i])$ ②

新

若k++，而有 $d[i]==k1$ ①→② $+(E1*(d[i]-(k1-1))-E2*(d[i]-(k1-1))-E3)$

即 $+((E1-E2)*(d[i]-k)-E3)$

即 $+(E1-E2-E3)$

$f(x)=2x_1^2+x_2^2-4x_1+2$

$x_1=(2,1)'$ $\nabla f=(4x_1-4,\ 2x_2)'$

$g_1=(4,2)'$

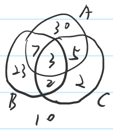
$H_1=I$

习题

2024年3月11日　9:50

1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 21
24, 25, 27, 29

1. $P(A)=0.45$, $P(B)=0.35$, $P(C)=0.3$



$P(AB)=0.1$, $P(AC)=0.08$, $P(BC)=0.05$

$P(ABC)=0.03$.

$\Rightarrow P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=0.07$

$P(A\bar{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0.05$

$P(\bar{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.02$

$\Rightarrow P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\bar{B})-P(A\bar{B}C)$

$=P(A)-P(AB)-P(A\bar{B}C)=0.3$

$P(\bar{A}B\bar{C})=0.23$　　$P(\bar{A}\bar{B}C)=0.2$

(1) $P(A\bar{B}\bar{C})=0.3$　(2) $P(AB\bar{C})=0.07$

(3) $P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)=0.55$

(4) $P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)=0.14$

(5) 0.9　(6) 0.1

2. (1) A发生则B.C都发生

(2) B或C发生则A发生

(3) A,B都发生则C发生

(4) A发生则B.C中至少有一个不发生

8.

9. (1) $\frac{2}{5}$　(2) $\frac{2\times A_3^3}{A_5^3}=\frac{1}{10}$　(3) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$

(4) $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$　(5) $\frac{1}{5}$

12. (1) $(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}=\frac{(N-1)^{k-1}}{N^k}$

(2) $k\le N$, $\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{1}{N-i+1})\cdot\frac{1}{N-k+1}=\frac{1}{N}$

14. (1) $2^r\binom{n}{r}/\binom{2n}{2r}$　(2) $n\cdot 2^{r-1}\binom{n-1}{r-1}/\binom{2n}{2r}$

(3) $2^{r-2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{r-2}/\binom{2n}{2r}$　(4) $\binom{n}{r}/\binom{2n}{2r}$

15. 绑定一男一女，共m人 A_{m-1}^{m-1} 种排法.

$P=\frac{(m-1)!}{(m+n-1)!}$

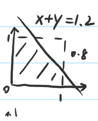
18. $P=\dfrac{\frac{48!}{9!(13!)^3}\cdot 4}{\frac{52!}{(13!)^4}}\approx 0.01$

20. $\dfrac{\binom{N}{n}}{N^n}$

21. 非严↑, 将第i位的号码加上i-1, 即得严↑

易知这种映射一一对应　$\dfrac{\binom{N+n-1}{n}}{N^n}$.

24. (1)



$P=0.68$

二

1~4, 6, 8~12, 15~18, 20, 21

25~27, 30, 31, 35, 38, 42, 43

1. $\frac{3!3!2!}{10!}=\frac{1}{50400}$

2. (1) $1-\binom{M-m}{2}/\binom{M}{2}$

(2) $\dfrac{\binom{m}{2}/\binom{M}{2}}{m/M}=\dfrac{m-1}{M-1}$

(3) $\dfrac{m(M-m)/\binom{M}{2}}{1-\binom{m}{2}/\binom{M}{2}}$

3. 乙袋期望球数: 白 $\alpha+\frac{2a}{a+b}$, 黑 $\beta+\frac{2b}{a+b}$.

$P=\binom{\alpha+\frac{2a}{a+b}}{2}/\binom{\alpha+\beta+2}{2}$　(注:当n整m非整, $\binom{m}{n}=\frac{\prod_{i=m-n+1}^{m} i}{n!}$)

4. A_n: 有n个小孩

B_k: 有k个男孩

则 $P(B_k|A_n)=\begin{cases}0, & n<k\\ \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, & n\ge k\end{cases}$

于是 $P(B_k)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_k|A_n)P(A_n)$　　$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$

$=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\cdot\alpha p^n$　　求k阶导 $\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$

$=\frac{\alpha}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)(\frac{p}{2})^n$　　$=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

$=\frac{\alpha}{k!}/(1-\frac{p}{2})^{k+1}$

6. A: 真正合格　B: 认为合格.

$P(A)=0.96$, $P(B|A)=0.98$　$P(B|\bar{A})=0.05$

$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$　　$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$=0.98\times0.96+0.05\times0.04$

$=0.9428$.

8. A: 落在A　B　C　　A': 失踪　B'　C'

$P(A'|A)=0.3$, B: 0.4, C: 0.5　　$P(A)=0.7$, 0.2, 0.1　$\Rightarrow$ $P(A')=0.21$, 0.08, 0.05

显然 $P(A'B')=0$, 故 $P(\bar{A}'B')=0.08$, $P(A'\bar{B}')=0.21$, $P(\bar{A}'\bar{B}')=0.71$

$P(C|\bar{A}'\bar{B}')=\frac{P(\bar{A}'\bar{B}'|C)P(C)}{P(\bar{A}'\bar{B}')}=\frac{0.1}{0.71}$

9. A=懂, B=答对

$P(B|A)=1$, $P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{2}$.

$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=\frac{4}{5}$

10. (1) $\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{7}{20}+\frac{2}{5}\times\frac{12}{20}=\frac{11}{25}$

(2) $P(\text{黑白}|\cdot\text{白})=\frac{P(\text{黑,白})}{P(\cdot\text{白})}=\frac{P(\text{黑白})}{P(\text{黑白})+P(\text{白白})}$

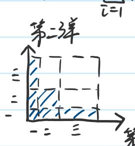
$=\dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{7}{20}\times\frac{13}{19}+\frac{2}{5}\times\frac{12}{20}\times\frac{8}{19}}{(\cdots)+(\frac{1}{5}\times\frac{7}{10}\times\frac{2}{9}+\cdots+\cdots)}=\frac{347}{798}$

11. A_i = 甲在第i回合获胜

$P(A_i)=(1-p_1)^{i-1}(1-p_2)^{i-1}p_1$

$P(\text{甲胜})=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$

12.



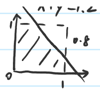
// 不可能的区域

在"已击中两弹"样本空间上考虑

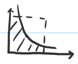
$P(\text{二三})=\frac{4}{11}$　$P(\text{三三})=\frac{7}{11}$

$P(\text{击落}|\text{二三})=0.2$　$P(\text{击落}|\text{三三})=0.7$

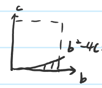
$P(\text{击落})=\frac{4}{11}\times0.2+\frac{7}{11}\times0.7=\frac{57}{110}$

24. (1) 

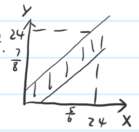
$P = 0.68$

(2) 
$P = \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{16}$

(3) $P = \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{16}$

25. 

$P = \frac{1}{12}$

27. 

逆：

$y \geq x+3$ 或 $x \geq y+4$

$P = 1 - \frac{49}{128} - \frac{25}{72}$

$= \frac{311}{1152}$

29. 

$\begin{cases} x+y > 1-x-y \\ |x-y| < 1-x-y \end{cases}$

$P = \frac{1}{8}$

用全概率公式证明公平抽签

T37. 记 $A_i = \{$第 i 张考签未被抽到$\}$

则 $P(A_i) = \frac{(N-1)^n}{N^n}$

$P(A_iA_j) = \frac{(N-2)^n}{N^n}$

$\cdots\ P(A_{i_1}\cdots A_{i_r}) = \frac{(N-r)^n}{N^n}$.

$P\{$至少有一张考签未被抽到$\} = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$

$= \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{i_1, i_2} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{N-1}(N-1)\sum_{i_1,\cdots,i_N} P(A_{i_1}\cdots A_{i_N})$

$= C_N^1 \frac{(N-1)^n}{N^n} - C_N^2 \frac{(N-2)^n}{N^n} + \cdots + (-1)^{N-1} \quad C_N^N \frac{0}{N^n}$

$= \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} \quad \binom{N}{i} \frac{(N-i)^n}{N^n}$.

$P(\text{击落}|\text{二}) = 0.2 \quad P(\text{击落}|\text{三}) = 0.7$

$P(\text{击落}) = \frac{4}{11} \times 0.2 + \frac{7}{11} \times 0.7 = \frac{57}{110}$

15. (1) $0 < P(B) < 1$,

A, B 独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

$\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$
$= P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})(1-P(B))$

$\Leftrightarrow P(A|B) - P(A|\bar{B}) = (P(A|B) - P(A|\bar{B}))P(B)$

$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A|\bar{B})$

(2) 因为 $P(A|\bar{B}) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$,

$P(A|B) = P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B})$

16. (1) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(AB) = \frac{3}{8}$.

(2) $P(A) = \frac{5}{16}$, $P(B) = \frac{7}{8}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$.

17. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

$\xlongequal{P(A)=p} 3p - 3p^2 = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow P(A) = p = \frac{1}{4}$

18. (1) $P((A \cup B)C) = P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC)$

$= [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C) = P(A \cup B)P(C)$

$P(ABC) = P(AB)P(C)$

$P((A-B)C) = P(AC - BC) = P(AC) - P(ABC)$

$= (P(A) - P(AB))P(C) = P(A-B)P(C)$

(2) $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1-P(A))(1-P(B))$

$= P(\bar{A})P(\bar{B})$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{\overline{\bar{A}\bar{B}} \cup C}) = 1 - P(A \cup B) - P(C) + P(A \cup B)P(C)$

$= (1 - P(A \cup B))(1 - P(C)) = P(\bar{A}\bar{B})P(\bar{C})$.

20. $P = 1 - (1-0.4)(1-0.5)(1-0.7) = 0.91$.

21. (1) $\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$ (2) $1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} p_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (1-p_j)$

25. (1) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ (2) $\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

26. (1) $1 - (1-p)^n$ (2) $1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$.

27. A：甲掷出 k 次正面.

$P(A) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$P(\text{正面数相等}) = \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$

30. $\binom{10}{2}\binom{10}{6}/\binom{20}{8} \cdot \frac{8}{12}$

31. 设 $n-1$ 个袋中黑球 p_{n-1}，则 $p_n = \frac{a+p_{n-1}}{a+b+1}$

$p_1 = \frac{a}{a+b}$，则 $p_2 = \frac{a}{a+b}$，…．$p_N = \frac{a}{a+b}$.

$(1+x)^{2n}$ 第 n 项为 $\binom{2n}{n}x^n$.

同时，$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$,

x^n 项系数为 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

35. (1) $1 - (1-p)^n - \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}$, $n \geq 1000$

(2) $\sum_{k=0}^{5}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k$

(3) 令 $f(k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(1-p)^{n-i}p^i$

$f(7) = 0.867$, $f(8) = 0.932$,

故能以90%的概率希望废品件数不超过8件

38. $P(\text{一个错字在某页上}) = \frac{1}{500}$

$P = 1 - \left(1-\frac{1}{500}\right)^{500} - \binom{n}{1}\left(1-\frac{1}{500}\right)^{499}\frac{1}{500} - \binom{n}{2}\left(1-\frac{1}{500}\right)^{498}\left(\frac{1}{500}\right)^2$

$= 0.08$

42. (1) $P = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{2}} = e^{-\frac{\lambda}{2}}$

42. (1) $P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$= e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{2}} = e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

(2) $P = p_2 / (1-p_0) = \frac{\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

43. $P = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda+\lambda p}$$

$$= \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

* 常用组合数公式

2024年6月21日 9:15

二项式定理

$$C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^{n} C_i^k$$
$$= C_n^k + \sum_{i=k}^{n-1} C_i^k = C_n^k + C_n^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

二阶求和公式：

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$ （由 $(1+x)^{2n}$）

范德蒙恒等式：

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

（n个中选若干个再从中选一个，
等价于先从n个中选一个再随机选一个包含它的子集）

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0$$

$$LHS = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (k-1)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-1)(n-2)\cdots k}{(n-1)!}$$